Trabajo Práctico N°6: ESPACIOS VECTORIALES CON PRODUCTO INTERIOR

Ejercicio 1:

Para cada espacio vectorial indicado, analice cuáles de las siguientes expresiones define un producto interior. Para ello, compruebe que se cumplen los axiomas correspondientes en los casos afirmativos y muestre qué axiomas no se cumplen en los casos negativos.

a) $V = IR^3$, $\langle u,v \rangle$ es el producto interior euclidiano en IR^3, $u, v \in IR^3$.

b) $V = IR^2$, $\langle u,v \rangle = u_1 v_1 - 3u_2 v_2$, $u = (u_1, u_2) \in IR^2$ y $v = (v_1, v_2) \in IR^2$.

c) $V = IR^3$, $\langle u,v \rangle = u_1 v_1 + 2u_2 v_2 + 6u_3 v_3$, $u = (u_1, u_2, u_3) \in IR^3$ y $v = (v_1, v_2, v_3) \in IR^3$.

d) $V = \{A \in M_{2x2} \ / \ A \text{ es una matriz diagonal con componentes reales}\}$,
$\langle A,B \rangle = a_{11} b_{11} - a_{22} b_{22}$, $A, B \in V$.

e) $V = IR^2$, $\langle u,v \rangle = u^T A v$, $u = (u_1, u_2) \in IR^2$, $v = (v_1, v_2) \in IR^2$ y $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$.

Ejercicio 2:

Complete la siguiente tabla considerando el producto interior definido en cada espacio vectorial indicado.

	$V = IR^2$, $\langle u,v \rangle = 3u_1 v_1 + u_2 v_2$, $u = (2,-1)$, $v = (-3,2)$	$V = IR^3$, $\langle u,v \rangle$ producto escalar, $u = (1,0,2)$, $v = (-2,3,1)$	$V = M_{2x2}$ $\langle A,B \rangle = a_{11} b_{11} + a_{12} b_{12} + a_{21} b_{21} + a_{22} b_{22}$, $u = A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $v = B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$
$\langle u,v \rangle$			
$\lVert u \rVert$			
$d(u,v)$			
$Áng(u,v)$			

Ejercicio 3:

Sean u y v vectores cualesquiera de un espacio vectorial V con producto interior. Demuestre que:

a) $\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2$

b) $\langle 0, v \rangle = \langle v, 0 \rangle = 0 \in IR$

Ejercicio 4:

Sean los vectores $u=(2,-1)$ y $v=(1,3)$ con el producto interior de IR^2 definido por $\langle u,v \rangle = u_1 v_1 + 2u_2 v_2$.

a) Verifique la desigualdad de Cauchy-Schwarz y la triangular para dichos vectores.
b) Determine el valor de w_1 de modo que el vector $w=(w_1,4)$ sea ortogonal a u.
c) Halle un vector unitario en la dirección de v.

Ejercicio 5:

Considere el espacio vectorial IR^3 con el producto interior euclidiano. Determine, de ser posible, los valores de k de modo que los siguientes conjuntos resulten conjuntos de vectores ortogonales.

a) $\{(1,2,-1);(3,1,k)\}$
b) $\{(1,k,2k);(0,k,-1)\}$

Ejercicio 6:

Complete la siguiente tabla según corresponda. Considere en cada espacio vectorial indicado el producto interior euclidiano.

V	**Conjunto**	**Norma-lizado**	**Orto-gonal**	**Orto-normal**	**Base de *V***	**Base ortonor-mal de *V***
IR^2	$\{(5,3);(\ldots,\ldots)\}$				**X**	
IR^2	$\{(\ldots,\ldots);(0,\sqrt{2})\}$		**X**		**X**	
IR^3	$\{(0,0,-1);(1,0,0)\}$					

IR^3	$\{\left(-1/\sqrt{5}\,,2/\sqrt{5}\,,0\right);$ $\left(2/\sqrt{5}\,,1/\sqrt{5}\,,0\right);(\ldots,\ldots,\ldots)\}$	**X**	**X**	**X**	**X**	**X**
IR^4			**X**			

Ejercicio 7:

Sean u, v y w vectores de IR^n tales que u y v son vectores ortogonales, $\|u\|=3; \|v\|=7; \|w\|=1; \langle v,w\rangle=4; \langle u,w\rangle=6$. Utilice dicha información para evaluar las siguientes expresiones.

a) $\|u+v\|$
b) $\|u-3v\|^2$
c) $\langle v\text{ - }3w,\ 2u+w\rangle$
d) $\langle u+v\text{ - }w,\ 3u+4v\rangle$

Ejercicio 8:

Para cada uno de los siguientes ítems, considere en cada espacio vectorial el producto interior euclidiano y determine el ángulo entre:

a) un vector v de IR^n y su opuesto;
b) los planos de IR^3:
$\pi_1 \equiv 3x-y+2z=0$
$\pi_2 \equiv 2x-3y-z=0$;
c) las rectas de IR^3:
$r_1 \equiv \overline{OP}=(2,\text{-}1,3)+\lambda(3,\text{-}3,0),\ \lambda\in IR$
$r_1 \equiv \overline{OQ}=(1,2,5)+\lambda(2,\text{-}1,2),\ \lambda\in IR$

Ejercicio 9:

Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones. Demuestre las verdaderas y proporcione contraejemplos para las falsas.

a) Si u y v son vectores ortogonales en un espacio vectorial con producto interior, V, tales que $\| u \| = \| v \| = 1$, entonces $\{u,v\}$ es una base ortonormal de V.

b) Los vectores $u=(1,-3,1)$ y $v=(0,-1,-3)$ con el producto interior de IR^3 definido por $\langle u,v\rangle = 5u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$ son ortogonales.

c) El conjunto formado por los vectores u y v del ítem (b) es una base de IR^2.

d) Si u es un vector de un espacio vectorial con producto interior V y $k\in IR$ entonces
$$\| k\, u \| = | k |\, \| u \|.$$

e) Toda base de IR^n es un conjunto ortogonal de vectores de IR^n.

f) Sean u, v y w vectores de un espacio vectorial con producto interior V, si w es ortogonal al vector u y al vector v, entonces w es ortogonal a toda combinación lineal de u y v.

Ejercicio 10 (OPCIONAL): Un producto interior asociado con el Cálculo

a) Sean f y g dos funciones continuas en el intervalo $[a,b]$. Demuestre que la siguiente expresión $\langle f,g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx$ define un producto interior sobre el espacio de todas las funciones continuas definidas en $[a,b]$.

b) Utilice el producto interior definido en el ítem (a) para calcular $\langle f,g\rangle$ para la función f dada por $f(x)=cos(2\pi x)$ y para la función g dada por $g(x)=sen(2\pi x)$, con $x\in[0,1]$.

c) Calcule $\|g\|$ para $g(x)=sen(2\pi x)$, con $x\in[0,1]$.

Solución

a) Sean f, g y h funciones continuas en el intervalo $[a,b]$. Sea $k\in IR$.

1. $\langle f,g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx = \int_a^b g(x)f(x)dx = \langle g,f\rangle$
2. $\langle f+g,h\rangle = \int_a^b (f(x)g(x))\,h(x)dx = \int_a^b f(x)h(x)dx + \int_a^b g(x)h(x)dx = \langle f,h\rangle + \langle g,h\rangle$
3. $\langle k\,f,g\rangle = \int_a^b k\,f(x)g(x)dx = k\int_a^b g(x)f(x)dx = k\langle g,f\rangle$
4. $\langle f,f\rangle = \int_a^b f(x)f(x)dx = \int_a^b f^2(x)dx \geq 0$ por ser $f^2(x)\geq 0$ para todo $x\in[a,b]$.

   Además, por ser f continua y $f^2(x)\geq 0$ en $[a,b]$, $\int_a^b f^2(x)dx = 0$ si y sólo si $f(x)=0$ para todo $x\in[a,b]$. Por lo tanto, se tiene que $\langle f,f\rangle = 0$ si y sólo si $f\equiv 0$.

Luego, $\langle f,g\rangle$ es un producto interior.

b) $\langle f,g\rangle = \int_0^1 cos(2\pi x)sen(2\pi x)dx = \left.\dfrac{1}{2\pi}\dfrac{sen^2(2\pi x)}{2}\right]_0^1 = 0 \Rightarrow \langle f,g\rangle = 0$

c) $\parallel f \parallel^2 = \langle f, f \rangle = \int_0^1 cos(2\pi x) cos(2\pi x) dx = \int_0^1 cos^2(2\pi x)\ dx = \int_0^1 \frac{1+cos(4\pi x)}{2}\ dx =$

$$= \frac{1}{2} x \Big]_0^1 + \frac{1}{2} \frac{sen(4\pi x)}{4\pi} \Bigg]_0^1 = \frac{1}{2} + 0 \Rightarrow \parallel f \parallel = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Ejercicio 11 (OPCIONAL): Proyección ortogonal

Si P es un punto en el espacio tridimensional ordinario y W es un plano que pasa por el origen, entonces el punto Q en W más próximo a P se obtiene al trazar una perpendicular de P a W. El vector w_1 (Figura 1) se denomina proyección ortogonal de u sobre W y se denota $proy_W u$ y el vector w_2 ($w_2 = u - proy_W u$) se denomina componente de u ortogonal a W. Si el conjunto $\{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$ es una base ortonormal de W, entonces:

$$proy_W u = <u, v_1> v_1 + <u, v_2> v_2 + \ldots <u, v_r> v_r$$

Si $u = \overline{OP}$, la distancia entre P y W está dada por $\| u - proy_W u \|$.

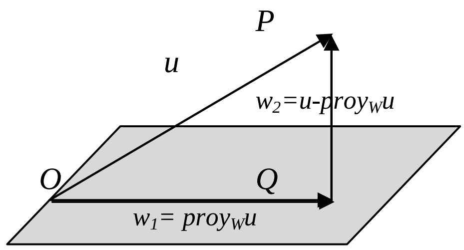

Figura 1

Sea W el plano en IR^3 de ecuación $x - 2y - z = 0$:

a) Halle una base ortonormal para W.
b) Determine el vector v de W más próximo al vector $u = (-1, 1, 0) \in V$.
c) Obtenga la distancia de u a W.

Solución

a) Si $w \in$ W entonces $w = (2y+z, y, z) = y(2, 1, 0) + z(1, 0, 1)$ con $y, z \in IR$, luego una base para W es:

$$B = \{(2, 1, 0), (1, 0,1)\} = \{u_1, u_2\},$$

se debe hallar entonces una base ortonormal para W, digamos $B' = \{v_1', v_2'\}$.

Aplicando el proceso de Gram-Shmidt tendremos una base ortogonal $\{v_1, v_2\}$:

$$v_1 = u_1 = (2,\ 1,0)$$

$$v_2 = u_2 - \frac{\langle u_2 , v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1 = (1,\ 0,1) - \frac{2}{5}(2,\ 1,0) = (\ 1/5\ ,\ -2/5\ ,\ 1)$$

Sólo falta normalizar los vectores:

$$v_1' = \frac{v_1}{\|v_1\|} = (\ 2\sqrt{5}/5\ ,\ \sqrt{5}/5\ ,0)$$

$$v_2' = \frac{v_2}{\|v_2\|} = (\ \sqrt{30}/30, -2\sqrt{30}/30, \sqrt{30}/6\ )$$

Luego una base ortonormal para W es:

$$B' = \left\{ \left(2\sqrt{5}/5,\ \sqrt{5}/5\ ,0\right); \left(\sqrt{30}/30\ ,\ -2\sqrt{30}/30\ ,\sqrt{30}/6\right) \right\}$$

b) El vector v de W más próximo al vector $u= (-1, 1, 0) \in V$ es $proy_W u$, donde $proy_W u = <u, v_1> v_1 + <u, v_2> v_2$, siendo $\{v_1, v_2\}$ *una base ortonormal de* W.

$$\begin{aligned} proy_W u &= \langle u,v_1 \rangle v_1 + \langle u,v_2 \rangle v_2 \\ &= \left\langle (-1,1,0), \left(\frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5}, 0 \right) \right\rangle \left(\frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5}, 0 \right) + \\ &+ \left\langle (-1,1,0), \left(\frac{\sqrt{30}}{30}, \frac{-2\sqrt{30}}{30}, \frac{\sqrt{30}}{6} \right) \right\rangle \left(\frac{\sqrt{30}}{30}, \frac{-2\sqrt{30}}{30}, \frac{\sqrt{30}}{6} \right) = \\ &= -\frac{\sqrt{5}}{5} \left(\frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5}, 0 \right) - 3\frac{\sqrt{30}}{30} \left(\frac{\sqrt{30}}{30}, \frac{-2\sqrt{30}}{30}, \frac{\sqrt{30}}{6} \right) = \\ &= \left(-\frac{2}{5}, -\frac{1}{5}, 0 \right) - \left(\frac{3}{30}, \frac{-6}{30}, \frac{3}{6} \right) = \left(-\frac{1}{2},\ 0,\ -\frac{1}{2} \right) \end{aligned}$$

Entonces,

$$proy\ _W\ u = (\ -1/2\ ,\ 0, -1/2\ )$$

c) La distancia de u a W, $d(u, W)$, está dada por $\|u - proy_W u\|$.

$$\begin{aligned} \|u - proy_W u\| &= \|(\ -1,1,0) - (\ -1/2\ ,\ 0, -1/2\ )\| = \\ &= \|(\ -1/2\ ,\ 1,\ 1/2\ )\| = (1/2\ )\sqrt{6} \qquad \Rightarrow \qquad d(u,W) = (1/2\ )\sqrt{6} \end{aligned}$$